Système formé de deux points matériels

Exercice 1. Deux particules chargées.
Nous étudions, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire, deux particules chargées M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 et dont les charges q_1 et q_2 sont de même signe. A l'instant initial $t = 0$, les deux particules sont séparées d'une distance r_0 et sont lâchées sans vitesse initiale. En négligeant le poids des particules, calculer leurs vitesses limites v_{1_l} et v_{2_l} atteintes au bout d'un temps très long. Quelle propriété présente le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ associé aux deux particules ?

Exercice 2. Mécanique des agrégats (d'après concours).
Ce problème concerne l'étude d'un assemblage d'atome appelé agrégat. L'agrégat le plus simple est un système isolé constitué de deux points matériels de masse m, de positions $\mathbf{OM}_i = \mathbf{r}_i$ ($i = 1$ à 2) par rapport à un référentiel $\mathcal{R}_0$(Oxyz) supposé galiléen. La force exercée par l'atome i sur l'atome j dérive d'une énergie potentielle $u(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = u(r_{ij})$ où r_{ij} est la distance entre les deux atomes i et j : $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\| = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ et la fonction $u(r)$ est donnée par $u(r) = 4\epsilon\left(\frac{b^{12}}{r^{12}} - \frac{b^6}{r^6}\right)$, ϵ et b sont des constantes positives.

1.a. Quelle propriété possèdent la quantité de mouvement totale par rapport à $\mathcal{R}_0$ et le moment cinétique total en O par rapport à $\mathcal{R}_0$, $\mathbf{L}_{O/\mathcal{R}_0}$ du système constitué de deux atomes ?
1.b. En utilisant la loi de composition des vitesses, démontrer que le moment cinétique total $\mathbf{L}_{G/\mathcal{R}_0}$, en G par rapport à $\mathcal{R}_G$ est égal à $\mathbf{L}_{G/\mathcal{R}_G}$ où $\mathcal{R}_G$ est le référentiel du centre de masse G. Montrer que $\mathbf{L}_{O/\mathcal{R}_0}$, est la somme de deux termes, dont l'un est associé au mouvement de G par rapport à $\mathcal{R}_0$ et l'autre au mouvement du système par rapport à $\mathcal{R}_G$ et que chacun de ces deux termes est constant.
1.c. Quelle propriété possède l'énergie mécanique, par rapport à $\mathcal{R}_0$, du système constitué de deux atomes ?
1.d. En utilisant la loi de composition des vitesses, montrer que cette énergie est la somme de deux termes, l'un associé au mouvement de G par rapport à $\mathcal{R}_0$, l'autre au mouvement du système par rapport à $\mathcal{R}_G$ et que chacun de ces termes est constant.

2. On considère maintenant le mouvement de l'agrégat constitué de deux atomes par rapport au référentiel du centre de masse $\mathcal{R}_G$. On notera $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{GM}_i$ ($i = 1$ à 2) les vecteurs position de chaque atome dans ce référentiel.
2.a. Montrer qu'une solution particulière des équations du mouvement est telle que les atomes sont immobiles et séparés d'une distance ρ_0 que l'on exprimera en fonction de b. Que vaut alors l'énergie mécanique du système ? L'équilibre est-il stable ?
2.b. Montrer que le mouvement général dans $\mathcal{R}_G$ est équivalent à celui d'une particule fictive de position $\boldsymbol{\rho}$ et de masse μ, que l'on déterminera, soumise à une force centrale dérivant de l'énergie potentielle $u(\rho)$, (avec $\rho = \|\boldsymbol{\rho}\|$).
2.c. Montrer que le mouvement de la particule fictive est plan et qu'il obéit à la loi des aires que l'on énoncera et démontrera.
2.d. Montrer que l'énergie mécanique dans $\mathcal{R}_G$, E_{CM}, ne dépend en fait que des deux variables ρ et $\dot{\rho}$, du module L de $\mathbf{L}_{G/\mathcal{R}_G}$ et des constantes ϵ, b et μ. En déduire que la variable ρ ne prend au cours du mouvement que les valeurs pour lesquelles $E_{CM} - E_e(\rho) \geq 0$ où $E_e(\rho)$ est une fonction de la variable ρ uniquement que l'on explicitera.
2.e. On veut montrer que la fonction $E_e(\rho)$ n'a pas de minimum quand L est plus grand qu'une certaine valeur L_0 que l'on déterminera. On pourra poser : $a = \frac{L^2}{2\mu b^2}$ et $X = \frac{b}{\rho}$.
Les calculs font apparaître la fonction $f(X) = 24\epsilon(2X^{10} - X^4)$ qui sera étudiée.
2.f. Montrer que, pour $0 < L < L_0$, $E_e(\rho)$ a un minimum en ρ_m et un maximum en ρ_M avec $\rho_M > \rho_m$ et $E_e(\rho_M) > 0$. Qu'en est-il pour $E_e(\rho_M) < 0$?
2.g. Préciser pour $L < L_0$, en fonction de E_{CM} si le mouvement est lié ou libre (on raisonnera dans le cas où $E_e(\rho_M) < 0$).