Calcul intégral et distribution de charges

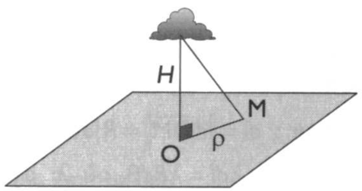
Exercice 1. Calcul intégral.

1. Rappeler les expressions des vecteurs déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées.
2. En déduire les expressions des longueurs, surfaces et volumes élémentaires.
3. Calculer alors en intégrant :

- le périmètre d'un cercle,
- la surface d'un rectangle de longueur a et de largeur b,
- la surface d'un disque de rayon R,
- la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h,
- la surface d'une sphère de rayon R,
- le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h,
- le volume d'une sphère de rayon R.

Exercice 2. Nuage orageux.

Un nuage, situé à la verticale du point O et portant une charge $+Q$, se trouve à une altitude H au dessus du sol. Des charges électriques se répartissent alors sur le sol suivant une répartition surfacique décrite par la densité :

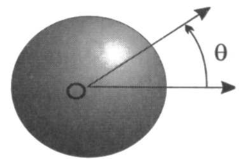


$$\sigma(\rho) = \frac{dq}{dS} = -\frac{QH}{2\pi(H^2+\rho^2)^{3/2}}$$

Montrer que la charge répartie sur le sol est égale à $-Q$.

Exercice 3. Charge répartie à la surface d'une sphère de polystyrène.

Une sphère de polystyrène placée dans un champ électrique se charge en surface avec une densité variant avec l'angle entre le champ électrique appliqué et le rayon vecteur **OM** selon : $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Calculer la charge apparue sur la demi sphère définie par $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis sur la sphère entière. Conclure.



Exercice 4. Distribution sphérique de charges.

Une sphère S de centre O et de rayon R est chargée en volume avec une densité volumique de charge $\rho_e(r)$ ne dépendant que de la distance r du point considéré au centre O : $\rho_e = \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ où ρ_0 est une constante. Quelle est la charge totale Q de S ? Calculer la densité volumique moyenne de charge ρ_m définie par $\rho_m = \frac{Q_{totale}}{V_{sphere}}$.

Exercice 5. Masse totale de l'atmosphère.

Pour estimer la masse totale de l'atmosphère terrestre, on se place dans le cadre du modèle suivant. La Terre est supposée sphérique de rayon $R_T = 6400\,km$. L'atmosphère est considérée comme formée d'un gaz parfait de masse molaire $M = 29\,g.mol^{-1}$, s'étendant depuis le sol jusqu'à une altitude de l'ordre de $100\,km$, dont la température constante est égale à $T_0 = 273\,K$. Dans ces conditions, la masse volumique de l'air varie avec l'altitude suivant la loi $\mu(z) = \frac{Mp_0}{RT_0}\exp -\frac{z}{H}$ avec $H = \frac{RT_0}{Mg}$ où p_0 est la pression au niveau du sol que nous prendrons égale à $10^5\,Pa$. La constante des gaz parfaits R sera prise égale à $R = 8,32\,J.K^{-1}.mol^{-1}$. Déduire de ces données la masse approximative de l'atmosphère. A titre indicatif, la masse totale de la Terre vaut $6.10^{24}\,kg$.