Éléments de statique des fluides dans le champ de pesanteur

Table des matières

On suppose dans le chapitre précédent que le système thermodynamique n'est soumis à aucune force extérieure

Dans ce chapitre on étudie les propriétés d'un fluide au repos dans un référentiel galiléen en tenant compte du champ de pesanteur

1 Forces de pression dans un fluide au repos

1.1 Quelques définitions

Un **fluide** est un ensemble d'entités microscopiques (atomes, molécules...) occupant un volume dont la forme géométrique s'adapte aux parois du récipient ; en pratique liquide ou gaz

On découpe à l'instant t le fluide en éléments de volume $d\tau(M)$ petit à l'échelle macro et suffisamment grand à l'échelle micro pour pouvoir définir des grandeurs moyennées sur $d\tau(M)$ = **particule de fluide**

L'**approximation des milieux continus** consiste alors à définir des champs macro en faisant des moyennes sur les éléments de volume $d\tau(M)$

par exemple, le champ de masse volumique

$$\rho(M) = \frac{dm}{d\tau}$$

où $dm = \sum m_i$ est la masse totale des molécules contenues dans $d\tau(M)$

le champ des vitesses

$$\mathbf{v}(M) = \frac{\sum \mathbf{v}_i}{dN} =< \mathbf{v}_i >$$

où dN est le nombre de molécules contenues dans $d\tau(M)$

Dans toute la suite, on se limitera au cas d'un fluide au repos

$$\mathbf{v}(M) = O$$

1.2 Forces volumiques et forces surfaciques

Parmi les actions extérieures subies par une partie quelconque d'un fluide, il faut distinguer :

(i) les forces volumiques qui décrivent des interactions à longue portée ; la force $d\mathbf{F}_v$ subie par une particule de fluide est proportionnelle à $d\tau$ ce qui permet de définir une densité volumique de force

$$\mathbf{f}_v = \frac{d\mathbf{F}_v}{d\tau}$$

par exemple dans le champ de pesanteur $d\mathbf{F}_v = dm\mathbf{g} = \rho\mathbf{g}d\tau$

(ii) les forces surfaciques qui décrivent des interactions à courte portée (forces de contact et chocs) ; nous admettrons comme un résultat de l'expérience, que dans un fluide au repos

$$d\mathbf{F}_s = -p(M)dS\mathbf{n}$$

où $\mathbf{n}$ est sortant ; ces forces existent aussi à l'intérieur mais elles se compensent !

1.3 Équivalent volumique des forces de pression

Soit une particule de fluide de volume $= dx\,dy\,dz$ soumise à la pesanteur ; la pression variant uniquement suivant z (expérience)

$$d\mathbf{F} = -p(z)dxdy(-\mathbf{e}_z) - p(z+dz)dxdy(+\mathbf{e}_z) = -\left(\frac{dp}{dz}\right)\mathbf{e}_z d\tau$$

comme si la particule de fluide était soumise à une force volumique de densité volumique

$$\boxed{\mathbf{f}_v = -\left(\frac{dp}{dz}\right)\mathbf{e}_z}$$

Dans le cas général où la pression peut dépendre des trois coordonnées, on démontre

$$\boxed{\mathbf{f}_v = -\mathbf{grad}p}$$

1.4 Principe fondamental de la statique des fluides

Pour que le fluide soit au repos dans le champ de pesanteur, il faut que le poids de chaque particule fluide soit compensé par les forces de pression exercées sur la particule de fluide (équilibre mécanique pour chaque particule fluide)

$$d\mathbf{F}_v + d\mathbf{F}_s = 0$$

$$\rho\mathbf{g}d\tau - \left(\frac{dp}{dz}\right)\mathbf{e}_z d\tau = 0$$

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

si l'axe z est orienté suivant la verticale ascendante

$$\boxed{\frac{dp}{dz} = +\rho g}$$

si l'axe z est orienté suivant la verticale descendante

2 Étude de l'atmosphère isotherme

2.1 Mise en place du modèle

Nous supposons avant tout l'existence d'un **équilibre thermodynamique local** : en un point A quelconque de côte z, une particule de fluide de volume $d\tau(A)$ constitue un système thermodynamique au sens du chapitre précédent, on peut notamment définir sa pression $p(A)$, sa température $T(A)$ et sa masse volumique $\rho(A)$

Nous assimilons l'atmosphère à un GP de masse molaire M ce qui est raisonnable car la densité moléculaire y est suffisamment faible. On peut alors écrire l'**équation d'état locale**

$$p(A)\,d\tau(A) = dnRT(A) = \frac{\rho(A)d\tau(A)RT(A)}{M}$$

puisque $dn = \dfrac{dm}{M}$

2.2 Calcul du champ de pression

(voir TD)

$$\boxed{p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)}$$

2.3 Ordres de grandeur et conséquences

Avec $M = 29\,g.mol^{-1}$, $R = 8,314\,J.K^{-1}.mol^{-1}$, $T = 273\,K$, $g = 9,8\,m.s^{-2}$ et $p_0 = 1\,bar$ on trouve pour $z = 100\,m$ $p = 0,988\,bar$

La variation relative de pression n'est donc que de 1,2% lors d'un déplacement vertical de 100 mètres

Dans un gaz peu dense occupant un volume raisonnable, l'influence de la pesanteur sur le champ de pression est négligeable

Ce qui justifie l'approximation faite dans le premier chapitre, approximation que nous ferons dans les chapitres suivants

L'atmosphère terrestre, qui s'étend sur plusieurs dizaines de kilomètres, apparaît en revanche comme un système suffisamment étendu pour que l'influence de la pesanteur s'y fasse sentir. Néanmoins, le modèle de l'atmosphère isotherme ne s'applique qu'à la haute atmosphère, pour des couches d'air dont l'altitude est comprise entre 11 et $30\,km$ avec une température de l'ordre de $223\,K$. En effet, l'uniformité de la température suppose un brassage suffisant des couches atmosphériques ce qui n'est pas le cas à basse altitude où le modèle du gradient de température est mieux adapté

2.4 Interprétation statistique : facteur de Boltzmann

voir TD

$$\boxed{n^* = C \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)}$$

Si nous découpons l'atmosphère en couches successives de côte z correspondant chacune à un niveau d'énergie $\epsilon = mgz$, le résultat précédent montre que les molécules se répartissent sur les différents niveaux d'énergie possibles proportionnellement à un facteur statistique $\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$ appelé facteur de Boltzmann

Nous admettrons que ce résultat se généralise :

Lorsqu'un système thermodynamique en équilibre à la température T est constitué de molécules dont l'énergie individuelle ϵ peut prendre différentes valeurs, les molécules se répartissent sur les différents niveaux énergétiques proportionnellement au facteur $\exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right)$

Les niveaux les plus peuplés sont donc les niveaux de plus basse énergie

3 Statique des fluides incompressibles

3.1 Intégrale première spatiale

Les liquides étant beaucoup plus denses que les gaz, il n'est en général pas possible de négliger les effets de la pesanteur sur le champ de pression ; en revanche on peut considérer qu'ils sont incompressibles et indilatables (ou T uniforme)

$$\rho(p, T) = \rho = cte$$

en pratique, on parlera de fluide incompressible et homogène

le principe fondamental de la statique des fluide donne alors

$$\boxed{p + \rho g z = cte}$$

attention à l'orientation des axes
cette relation s'applique en tout point d'un même volume de fluide ; pour des volumes disjoints la constante diffère

3.2 Applications

voir TD

3.2.1 Principe des vases communicants

La surface libre d'un fluide est contenue dans un plan horizontal

3.2.2 Interface entre deux fluides

L'interface entre deux fluides de densités différentes est contenue dans un plan horizontal

3.2.3 Variation de la pression avec l'altitude

$$p_2 - p_1 = \rho g(z_1 - z_2)$$

3.2.4 Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible est intégralement transmise en tout point du fluide

4 Poussée d'Archimède

Les forces de pression exercées par un fluide au repos sur un corps placé en son sein ont une résultante applée poussée d'Archimède opposée au poids du « fluide déplacé » ; la poussée est appliquée au centre d'inertie C du « fluide déplacé » appelé centre de poussée