Repérage d'un point - Vitesse et accélération

Table des matières

1 Espace et temps - Référentiel d'observation

D'une manière générale, repérer un point, paramétrer un point, nous servira tout au long du cours de Physique.
Plus particulièrement en Mécanique, repérer un point va nous permettre de calculer vitesse et accélération et de décrire les mouvements.

Dans ce chapitre nous ne nous préoccuperons pas encore des causes du mouvement (forces) et nous décrirons les mouvements par rapport à un **référentiel d'observation**, repère $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ + horloge, qui nous permettra, comme nous l'avons rappelé dans le chapitre précédent, de répondre aux questions où ? (**espace**) et quand ? (**temps**).

En mécanique classique, le temps est le même pour tous les observateurs, l'unité de temps, la seconde, étant défini comme 9 192 634 770 périodes de la radiation électromagnétique correspondant à la transition entre 2 niveaux hyperfins de l'état fondamental du césium 133.

En revanche pour répondre à la question où ? il existe différents systèmes de coordonnées...

2 Coordonnées cartésiennes

2.1 Repérage d'un point - Vecteur position

Pour repérer un point, on utilise un **repère**.
Un repère, c'est une **origine** O et une **base** $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ en général orthonormée et droite.

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base si $\forall\ \mathbf{V}$, $\exists\ (\alpha, \beta, \gamma)$ réels tel que $\mathbf{V} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$.

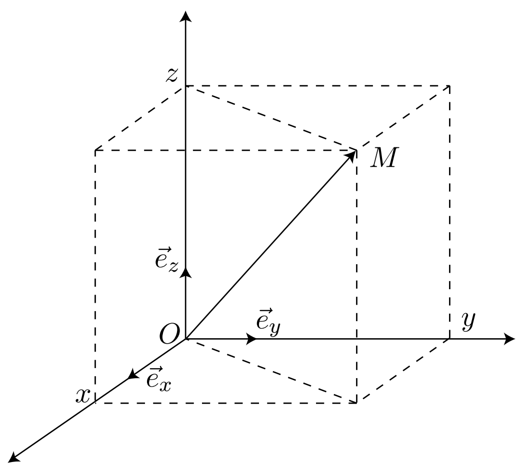
$(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est orthonormée si

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{u}.\mathbf{w} = \mathbf{v}.\mathbf{w} = 0$$

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$$

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad \circlearrowright$$

Soit la base cartésienne $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e_z})$



$x = \overline{OH}_x$, $y = \overline{OH}_y$ et $z = \overline{OI}$, **coordonnées cartésiennes** de M, définissent de façon unique la position de M extrémité du **vecteur position**

$$\boxed{\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}$$

Remarque : si l'on représente 2 des 3 vecteurs de la base dans un plan, pour déterminer si le 3^e^ est rentrant ou sortant, on utilise la règle des 3 doigts de la main droite ou la règle du tire bouchon.

Lorsque M se déplace, x, y et z varient (peuvent varier de $-\infty$ à $+\infty$) ; x, y et z sont des fonctions du temps et on devrait écrire $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

2.2 Vecteur vitesse et vecteur accélération

Lorsque M se déplace, H_x se déplace ; on peut associer à H_x une vitesse v_x :
vitesse moyenne $= \dfrac{distance}{temps} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{x(t + \Delta t) - x(t)}{t + \Delta t - t} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
vitesse instantanée

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

en $m.s^{-1}$ où $dx = x(t + dt) - x(t) = v_x dt$ est la variation élémentaire de x quand t varie de $dt \to 0$.

$\dfrac{dx}{dt}$ n'est pas seulement une écriture voulant dire je dérive la fonction $x(t)$ par rapport au temps t, c'est bien un rapport $\dfrac{x(t + dt) - x(t)}{t + dt - t}$.

De même $v_y = \dfrac{dy}{dt}$ est la vitesse de H_y et $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ est la vitesse de I.
v_x, v_y et v_z définissent le **vecteur vitesse** :

$$\boxed{\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z}$$

On utilise aussi la notation $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$:

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z}$$

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = \frac{d}{dt}(x\mathbf{e}_x) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{e}_y) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{e}_z) = \frac{d}{dt}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt}}$$

Encore une fois $\dfrac{d\mathbf{OM}}{dt}$ est bien un rapport :

$$\boxed{d\mathbf{OM} = \mathbf{v}dt = dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y + dz\mathbf{e}_z}$$

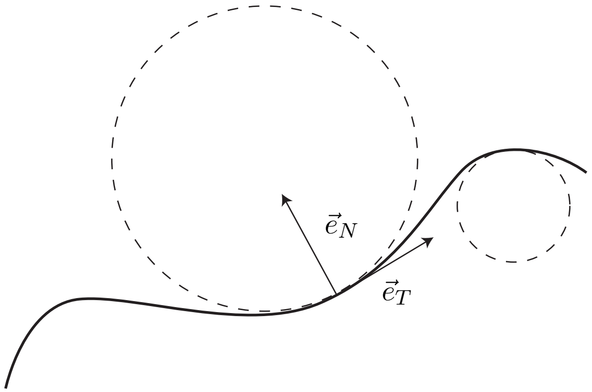
est le **vecteur déplacement élémentaire** (pendant dt, H_x se déplace de dx, H_y de dy et I de dz).

On peut aussi associer à H_x une accélération $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ en $m.s^{-2}$ et construire le **vecteur accélération** :

$$\boxed{\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z = \ddot{x}\mathbf{e}_x + \ddot{y}\mathbf{e}_y + \ddot{z}\mathbf{e}_z}$$

3 Coordonnées curvilignes - Base de Frénet

3.1 Repérage d'un point - Abscisse curviligne



On repère le point sur sa trajectoire (courbe orientée) par son **abscisse curviligne** :

$$\boxed{s = SM}$$

$\mathbf{e}_T$ et $\mathbf{e}_N$ forment la **base de Frénet**.
$\mathbf{e}_T$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire orienté selon le sens positif ; $\mathbf{e}_N$ s'obtient en tournant de $\pi/2$ vers l'intérieur de la concavité.

3.2 Vecteur vitesse et vecteur accélération

$$\boxed{\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_T} \quad avec \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_T + \frac{v^2}{R_c}\mathbf{e}_N}$$

$a_T = \dfrac{dv}{dt}$ est la composante tangentielle de l'accélération.
$a_N = \dfrac{v^2}{R_c}$ est la composante normale de l'accélération.

Pourquoi $\mathbf{a} \neq \dot{v}\,\mathbf{e}_T$?

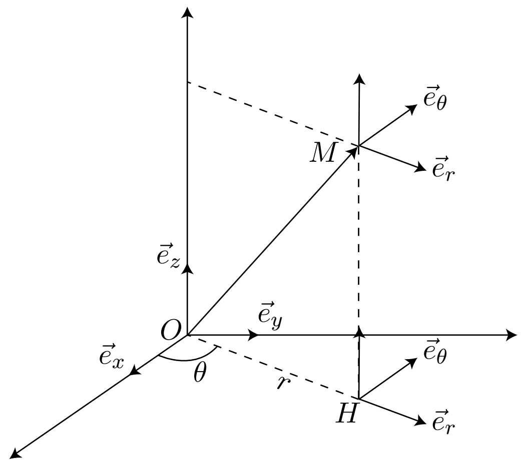
Quand on dérive (par rapport au temps), il faut toujours faire le point sur ce qui dépend du temps.

$v(t)$ mais aussi $\mathbf{e}_T(t)$!
Donc $\mathbf{a} = \dfrac{dv}{dt}\mathbf{e}_T + v\dfrac{d\mathbf{e}_T}{dt}$; en identifiant $\dfrac{v^2}{R_c}\mathbf{e}_N = v\dfrac{d\mathbf{e}_T}{dt}$ ou encore

$$\mathbf{e}_N = \frac{R_c}{v}\frac{d\mathbf{e}_T}{dt}$$

4 Coordonnées polaires et cylindriques

4.1 Repérage d'un point - Vecteur position



De la même manière que $x = \overline{OH}_x$, $y = \overline{OH}_y$ et $z = \overline{OI}$ définissaient de façon unique la position de M, les **coordonnées cylindriques**

$r = \|\mathbf{OH}\| = OH > 0$ de 0 à $+\infty$,
$\theta = (\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{OH}})$ de 0 à 2π et
$z = \overline{OI}$ de $-\infty$ à $+\infty$

définissent aussi de façon unique la position de M.

Si le mouvement est plan, on utilise les **coordonnées polaires** (r, θ).

$r = cte$ défini un cylindre de rayon r (un cercle en coordonnées polaires).
$\theta = cte$ défini un demi plan perpendiculaire au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (une demi droite en coordonnées polaires).
$z = cte$ défini un plan parallèle au plan$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$ forment la **base cylindrique** ($\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ la **base polaire**) :
$\mathbf{e}_r = \dfrac{\mathbf{OH}}{OH}$,
$\mathbf{e}_\theta$ s'obtient en tournant de $\pi/2$ dans le sens des θ croissant,
$\mathbf{e}_z$ est le 3[e] vecteur de la base cartésienne.

Le **vecteur position** s'écrit dans la base cylindrique

$$\boxed{\mathbf{OM} = r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z}$$

et dans la base polaire

$$\boxed{\mathbf{OM} = r\,\mathbf{e}_r}$$

4.2 Relations entre paramétrage cylindrique ou polaire et paramétrage cartésien

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = r\cos\theta$
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$y = r\sin\theta$
$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_x = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$
$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_y = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$

On remarque en particulier que $\mathbf{e}_\theta = \dfrac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}$ ou encore

$$\boxed{\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot\theta\,\mathbf{e}_\theta}$$

On pourra vérifier que

$$\boxed{\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot\theta\,\mathbf{e}_r}$$

On peut retenir la règle suivante : $\dot\theta \times$ vecteur obtenu par une rotation de $\pi/2$ dans le sens des θ croissant.

4.3 Vecteur vitesse et vecteur accélération

r, θ, z, mais aussi $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ dépendent du temps.
$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{OM}}{dt} = \dot r\,\mathbf{e}_r + r\,\dfrac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot z\,\mathbf{e}_z$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot r\,\mathbf{e}_r + r\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta + \dot z\,\mathbf{e}_z}$$

$\mathbf{v} = \dot r\,\mathbf{e}_r + r\dot\theta\,\mathbf{e}_\theta$ en polaire.

Calculons le vecteur accélération :
$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot r\,\mathbf{e}_r + \dot r\,\dfrac{d\mathbf{e}_r}{dt} + (\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\mathbf{e}_\theta + r\dot\theta\,\dfrac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \ddot z\,\mathbf{e}_z$

$$\boxed{\mathbf{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\mathbf{e}_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\mathbf{e}_\theta + \ddot z\,\mathbf{e}_z}$$

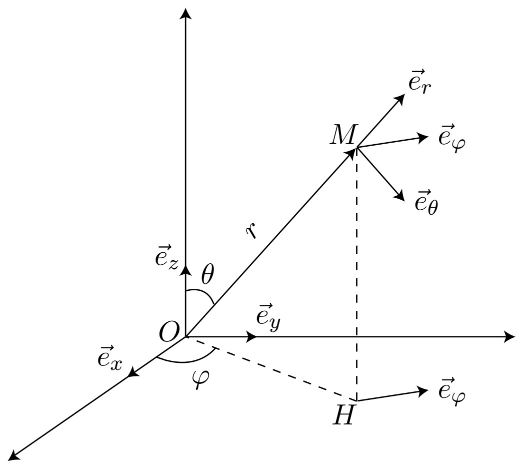
$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$ est la **composante radiale** de l'accélération.
$a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta$ est la **composante orthoradiale** de l'accélération.
$a_z = \ddot z$ est la **composante axiale**.

Calculons le vecteur déplacement élémentaire :

$$\boxed{d\mathbf{OM} = \mathbf{v}dt = dr\,\mathbf{e}_r + rd\theta\,\mathbf{e}_\theta + dz\,\mathbf{e}_z}$$

5 Coordonnées sphériques

5.1 Repérage d'un point - Vecteur position



Les **coordonnées sphériques** (r, θ, φ) définissent de manière unique la position du point M :
$r = \|\mathbf{OM}\|$ peut varier de 0 à $+\infty$
$\theta = (\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{OM}})$ peut varier de 0 à π
$\varphi = (\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{OH}})$ peut varier de 0 à 2π

Les vecteurs $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_\varphi$ constitue la **base sphérique** :
$\mathbf{e}_r = \dfrac{\mathbf{OM}}{OM}$
$\mathbf{e}_\varphi$ est obtenu en tournant de $\pi/2$ dans le sens des φ croissant à partir du vecteur **OH**
$\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi \wedge \mathbf{e}_r$

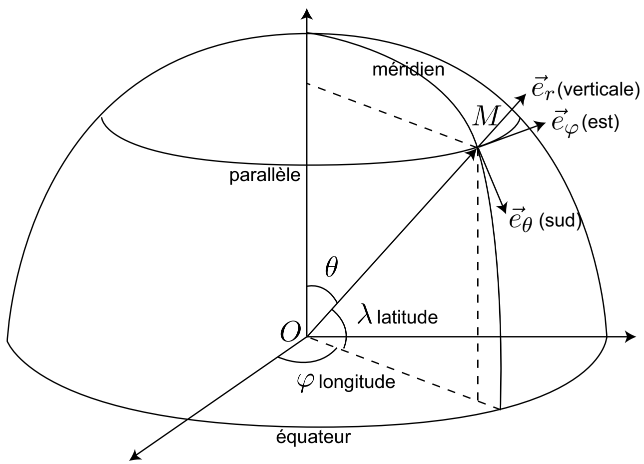
Le **vecteur position** s'écrit dans la base sphérique :

$$\boxed{\mathbf{OM} = r\,\mathbf{e}_r}$$

5.2 Relation entre paramétrage sphérique et paramétrage cartésien (voir TD)

5.3 Vecteur vitesse et vecteur accélération (voir TD)

5.4 Coordonnées géographiques



6 Exemples de mouvement

6.1 Vecteur accélération constant

$$\mathbf{a} = \mathbf{cte}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{OM} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{A}t + \mathbf{B}$$

6.2 Mouvement rectiligne sinusoïdal

$$\mathbf{OM} = x\,\mathbf{e}_x \quad avec \quad x = x_m \cos \omega t$$

$$\mathbf{v} = -x_m \omega \sin \omega t\,\mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{a} = -x_m \omega^2 \cos \omega t\,\mathbf{e}_x = -\omega^2\,\mathbf{OM}$$

6.3 Mouvement circulaire

Le paramétrage polaire est le mieux adapté :

$$\mathbf{OM} = R\,\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = R\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = -R\dot{\theta}^2\,\mathbf{e}_r + R\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$