Oscillateur harmonique - Régime libre

L'importance de l'oscillateur harmonique à un degré de liberté en physique justifie qu'on lui consacre un chapitre.

Table des matières

1 Oscillateur harmonique

On appelle oscillateur harmonique tout système à un degré de liberté dont l'évolution au cours du temps (en l'absence d'amortissement et d'excitation) est régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0$$

quelle que soit la nature physique de la variable x.

L'oscillateur harmonique évolue dans un puit de potentiel de type parabolique :
soit

$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

soit

$$E_p(x) \simeq E_p(0) + \frac{1}{2}kx^2$$

au voisinage d'une position d'équilibre stable (voir cours précédent).

L'oscillateur harmonique est soumis à une force de rappel proportionnelle à x :

$$F = -\frac{dE_p}{dx} = -kx$$

2 Oscillations libres

2.1 Pulsation propre - Isochronisme des oscillations

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -x_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = v(t)$$

x_m et φ sont déterminés par les conditions initiales.
Si $x(0) = x_0$ et $v(0) = v_0$ alors

$$\begin{cases} x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega_0 x_0} \end{cases}$$

La période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ est indépendante des conditions initiales ; c'est une propriété importante de l'oscillateur harmonique appelée *isochronisme* des oscillations.

2.2 Étude énergétique

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi) = \frac{1}{2}kx_m^2$$

Calculons la valeur moyenne de E_p

$$\langle E_p\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_p(t)dt = \frac{kx_m^2}{2}\langle\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\rangle = \frac{kx_m^2}{4}$$

de même

$$\langle E_c\rangle = \frac{kx_m^2}{4}$$

Pendant le mouvement, il y a équipartition, en moyenne, des formes cinétique et potentielle de l'énergie.

$$\langle E_p\rangle = \langle E_c\rangle = \frac{E_m}{2}$$

3 Oscillations libres amorties

3.1 Temps de relaxation - Facteur de qualité

Avec amortissement, l'équation différentielle devient

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}$$

que l'on met sous la forme

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $2\alpha = \dfrac{h}{m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, ou encore

$$\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0$$

où τ est une constante ayant la dimension d'un temps qui est appelée **temps de relaxation** de l'oscillateur, ω_0 étant sa **pulsation propre**.
Pour décrire l'oscillateur amorti, on peut préférer au couple (ω_0,τ) le couple (ω_0,Q), Q étant un paramètre sans dimension appelé **facteur de qualité** défini par

$$Q = \omega_0\tau = 2\pi\frac{\tau}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{h}$$

Une solution en $\exp(rt)$ existe si

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$$

Suivant le signe du discriminant réduit, plusieurs régimes sont possibles

$$\Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$$

3.2 Régime pseudo-périodique

Si les frottements sont faibles alors $\alpha < \omega_0$, $Q > \dfrac{1}{2}$ et $\Delta' < 0$

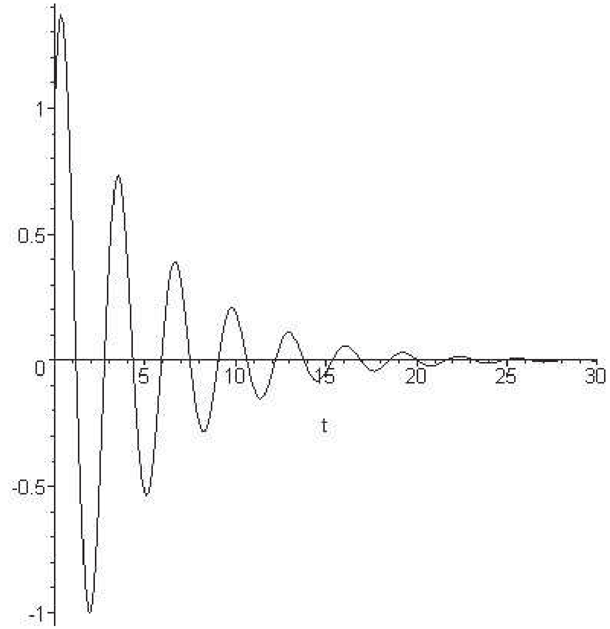
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

en introduisant la pseudo-pulsation Ω telle que $\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ ($\Delta' = -\Omega^2 = (i\Omega)^2$ et $r = -\alpha \pm i\Omega$).

$$\dot{x} = -\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) + \mathrm{e}^{-\alpha t}\Omega(-A\sin\Omega t + B\cos\Omega t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha A + \Omega B = v_0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(x_0\cos\Omega t + \frac{v_0+\alpha x_0}{\Omega}\sin\Omega t)}$$



Une telle évolution de retour vers un état permanent est qualifiée de relaxation ; ce retour se fait au bout de quelques τ.

$T = \dfrac{2\pi}{\Omega} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha}{\omega_0}\right)^2}} = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ est la **pseudo-période**.

La détermination expérimentale de $\delta = \ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+T)}\right)$ appelé **décrément logarithmique** permet de calculer le facteur de qualité

$$\delta = \alpha T = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \dfrac{1}{4}}}$$

3.3 Régime apériodique

Si les frottements sont importants alors $\alpha > \omega_0$, $Q < \dfrac{1}{2}$ et $\Delta' > 0$

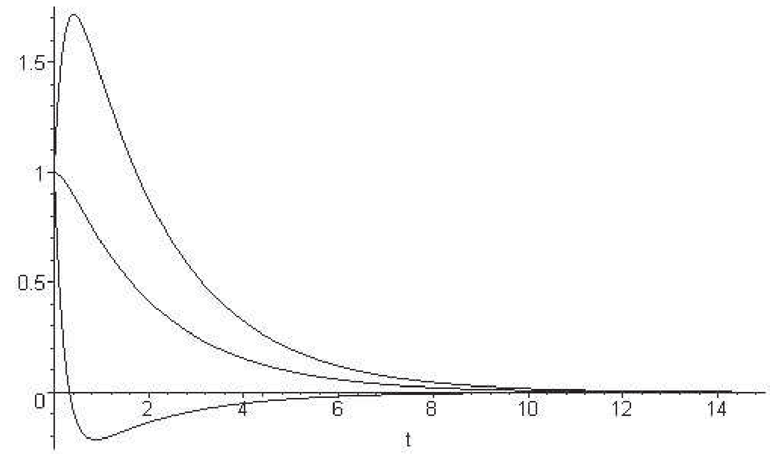
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cosh\Omega' t + B\sinh\Omega' t)$$

avec $\Omega'^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$ ($r = -\alpha \pm \Omega'$).

$$\dot{x} = -\alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cosh\Omega' t + B\sinh\Omega' t) + \mathrm{e}^{-\alpha t}\Omega'(A\sinh\Omega' t + B\cosh\Omega' t)$$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha A + \Omega' B = v_0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(x_0\cosh\Omega' t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\Omega'}\sinh\Omega' t\right)}$$



3.4 Régime critique

Si $\alpha = \omega_0$, $Q = \dfrac{1}{2}$ et $\Delta' = 0$

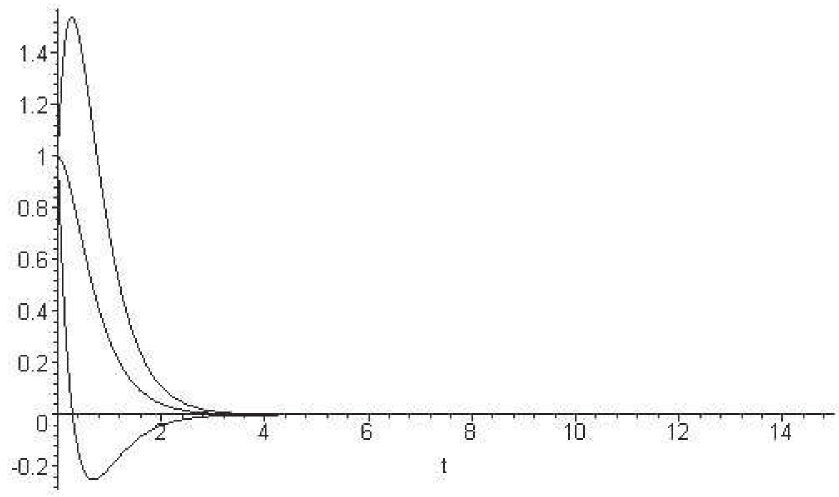
$$x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}(At + B)$$

$(r = -\alpha)$.

$$\dot{x} = -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t}(At + B) + \mathrm{e}^{-\alpha t} A$$

$$\begin{cases} x(0) = B = x_0 \\ \dot{x}(0) = -\alpha B + A = v_0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}((v_0 + \alpha x_0)t + x_0)}$$



Le régime critique n'est jamais réalisé physiquement exactement.

3.5 Étude énergétique

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}^{nc} = -hv^2 < 0$$