Dynamique du point en référentiel galiléen

Il faut bien comprendre que la 2^e^ loi de Newton rappelée dans le chapitre d'introduction à la mécanique classique appliquée dans notre « référentiel Oxyz » considéré galiléen suffit à résoudre « tous les problèmes » analytiquement ou numériquement. Nous aurions pu en rester là.
Tout ce qui suit va faciliter la résolution (et donc souvent la compréhension) de certains problèmes.
Nous venons de voir que la description du mouvement d'un point peut-être simplifiée avec d'autres systèmes de coordonnées et d'autres bases.
Un peu dans le même état d'esprit, nous allons voir que la 2^e^ loi peut s'écrire autrement en faisant apparaître de nouvelles grandeurs qui peuvent s'avérer très utiles pour certains problèmes.
Enfin nous ferons l'inventaire des forces qui interviennent le plus couramment dans les problèmes.

Table des matières

1 Lois de Newton

1^re^ loi ou principe d'inertie Dans un référentiel galiléen, un point matériel isolé à un mouvement rectiligne uniforme.

2^e^ loi ou principe fondamental de la dynamique Dans un référentiel galiléen $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$.

3^e^ loi ou principe de l'action et de la réaction Les forces d'interaction réciproque qui s'exercent entre deux points matériels sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points.

2 Quantité de mouvement

2.1 Définition

La masse (inertielle) étant invariante en mécanique clasique on a :

$$m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

La grandeur

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}$$

est appelée **quantité de mouvement** du point M où m est la masse de M et $\mathbf{v}$ son vecteur vitesse.

2.2 Théorème de la quantité de mouvement

La 2^e^ loi peut alors s'écrire en faisant apparaître la quantité de mouvement :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}}$$

Comme la 2^e^ loi, le théorème de la quantité de mouvement s'applique dans un référentiel galiléen.

2.3 Conservation de la quantité de mouvement

Si $\mathbf{F} = 0$ (point isolé ou pseudo-isolé) alors

$$\mathbf{p} = \mathbf{cte}$$

ou encore $\mathbf{v} = \mathbf{cte}$ et l'on retrouve la 1$^{\text{re}}$loi de Newton.

Pour un système quelconque aussi complexe soit-il nous verrons que la 2$^{\text{e}}$ loi peut s'écrire :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F_{ext}}$$

où $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ est la quantité de mouvement totale du système et $\mathbf{F_{ext}}$ la résultante des forces extérieures au système.
La conservation de la quantité de mouvement permet alors d'expliquer le recul d'un canon :
l'ensemble canon-projectile étant immobile la quantité de mouvement totale est nulle ; la résultante des forces extérieures s'exerçant sur l'ensemble canon-projectile étant nulle, la quantité de mouvement se conserve, elle reste nulle ; donc si le projectile part d'un côté, il faut que le canon parte à l'opposé pour que la quantité de mouvement totale reste nulle.
Les avions à réaction et les fusées fonctionnent aussi sur ce principe : du gaz est éjecté d'un côté pour propulser l'avion ou la fusée de l'autre côté.

3 Puissance, travail et énergie cinétique

3.1 Définitions

Multiplions scalairement la 2$^{\text{e}}$ loi de Newton par $\mathbf{v}$:

$$m\mathbf{a}.\mathbf{v} = \mathbf{F}.\mathbf{v}$$

$$\mathbf{a}.\mathbf{v} = \frac{dv_x}{dt}v_x + \frac{dv_y}{dt}v_y + \frac{dv_z}{dt}v_z = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_x^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{v_y^2}{2}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{v_z^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F}.\mathbf{v}$$

ou encore

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathbf{F}.\mathbf{v}dt = \mathbf{F}.d\mathbf{OM}$$

$$\boxed{\mathcal{P} = \mathbf{F}.\mathbf{v}}$$

est la **puissance** de la résultante des forces $\mathbf{F}$ qui s'exercent sur M où $\mathbf{v}$ est la vitesse de M.

$$\boxed{\delta W = \mathbf{F}.d\mathbf{OM} = \mathbf{F}.\mathbf{v}dt = \mathcal{P}(t)dt}$$

est le **travail élémentaire** de la résultante des forces $\mathbf{F}$ qui s'exercent sur M où $d\mathbf{OM}$ est le déplacement élémentaire de M.

Le **travail** W entre deux instants t_1 et t_2 s'écrit

$$\boxed{W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F}.d\mathbf{OM}}$$

Enfin

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

est l'**énergie cinétique** de M où m est la masse de M et $\mathbf{v}$ sa vitesse.

3.2 Théorème de la puissance cinétique

D'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}}$$

Dans un référentiel galiléen, la puissance de la résultante des forces exercées sur M est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique.

3.3 Théorème de l'énergie cinétique

Toujours d'après ce qui précède, on a

$$dE_c = \delta W$$

qui constitue la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique. En intégrant entre deux instants t_1 et t_2

$$\boxed{\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)dt = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F}.d\mathbf{OM}}$$

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique de M entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de la résultante des forces qui s'exercent sur M entre ces deux instants.
Attention : en général $W \neq W(t_2) - W(t_1)$.

3.4 L'énergie cinétique se conserve-t'elle ?

Si $\mathbf{F} = 0$ (point isolé ou pseudo-isolé) alors $\mathcal{P} = 0$ et $E_c = cte$.

Contrairement à la conservation de la quantité de mouvement qui reste valable pour les systèmes, la conservation de l'énergie cinétique n'est valable que pour le point ; celle-ci est par exemple mise en défaut sur l'exemple du système canon-projectile.

Nous verrons que pour un système, le théorème de la puissance cinétique s'écrit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$$

où E_c est l'énergie cinétique totale du système, $\mathcal{P}_{ext}$ la puissance des forces extérieures qui s'exercent sur le système et $\mathcal{P}_{int}$ la puissance des forces intérieures qui s'exercent sur le système. C'est justement la présence de $\mathcal{P}_{int}$ qui est à l'origine de la non conservation de l'énergie cinétique.

4 Forces

4.1 Force de pesanteur - Chute libre

Soit un projectile de masse m lancé avec une vitesse initiale $\mathbf{v}_0$ et soumis uniquement à son poids.

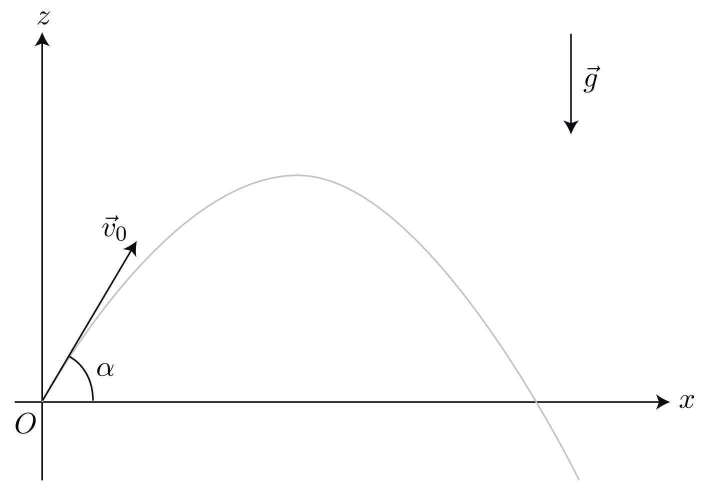
Système étudié : projectile de masse m assimilable à un point.

Référentiel : référentiel d'observation (terrestre) supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$

PFD : $m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$

Projection : il s'agit de choisir le paramétrage le plus approprié au problème ; les coordonnées cartésiennes avec un axe colinéaire à $\mathbf{g}$ sont, pour la chute libre, les plus appropriées.



$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

Pour trouver l'équation de la trajectoire, il suffit d'éliminer t :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \qquad z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + \tan\alpha\, x$$

Pour trouver la portée, il faut résoudre $z = 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \ \textit{maximum pour}\ \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Pour trouver la flêche, il faut résoudre $v_z = 0$:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \qquad \begin{cases} x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \\ x = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \end{cases}$$

Le point (x_C,0,z_C) est atteint par le projectile pour une vitesse v_0 donnée si x_C et z_C vérifient

$$z_C = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\, x_C^2 + \tan\alpha\, x_C$$

ou encore, si α est solution de l'équation

$$-\frac{gx_C^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha + x_C\tan\alpha - \frac{gx_C^2}{2v_0^2} - z_C = 0$$

c'est-à-dire si

$$\Delta = x_C^2 - 4\frac{gx_C^2}{2v_0^2}(\frac{gx_C^2}{2v_0^2} + z_C) \geq 0$$

Les points accessibles du plan (Oxz) sont donc situés sous la **parabole de sûreté** d'équation

$$z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

4.2 Force de frottement dans un fluide

4.2.1 Chute libre avec frottement « en v »

Il faut rajouter la force $-k\mathbf{v}$

$$\begin{cases} a_x = -\dfrac{k}{m}v_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_z = -g - \dfrac{k}{m}v_z = \dfrac{dv_z}{dt} \end{cases}$$

On pose $\lambda = \dfrac{k}{m}$ et on intègre (pour v_z changement de variable $u = g + \lambda v_z$)

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{v_x} = -\lambda dt \\ \dfrac{\lambda dv_z}{g+\lambda v_z} = -\lambda dt \end{cases} \quad \begin{cases} \ln\left(\dfrac{v_x}{v_0\cos\alpha}\right) = -\lambda(t-0) \\ \ln\left(\dfrac{g+\lambda v_z}{g+\lambda v_0\sin\alpha}\right) = -\lambda(t-0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = (v_0\cos\alpha)\exp(-\lambda t) \\ v_z = (\dfrac{g}{\lambda} + v_0\sin\alpha)\exp(-\lambda t) - \dfrac{g}{\lambda} \end{cases}$$

Pour v_z on aurait pu résoudre une équation différentielle avec second membre

$$\frac{dv_z}{dt} + \lambda v_z = -g$$

dont la solution est la somme solution générale de l'équation homogène sans second membre + solution particulière de l'équation avec second membre (ne marche que pour les équations différentielles linéaires)

$$v_z = C\exp(-\lambda t) - \frac{g}{\lambda}$$

On utilise les conditions initiales (sur la somme solution générale de l'équation homogène sans second membre + solution particulière de l'équation avec second membre)

$$v_z(t=0) = C - \frac{g}{\lambda} = v_0\sin\alpha$$

et on retrouve le même résultat.

On intègre une 2^{e}fois pour x et z

$$\begin{cases} x = -\dfrac{v_0\cos\alpha}{\lambda}\exp(-\lambda t) + A \\ z = -\dfrac{(\frac{g}{\lambda} + v_0\sin\alpha)}{\lambda}\exp(-\lambda t) - \dfrac{g}{\lambda}t + B \end{cases}$$

Avec les conditions initiales $x = 0$ et $z = 0$, on a finalement

$$\begin{cases} x = \dfrac{v_0\cos\alpha}{\lambda}(1-\exp(-\lambda t)) \\ z = \dfrac{(\frac{g}{\lambda} + v_0\sin\alpha)}{\lambda}(1-\exp(-\lambda t)) - \dfrac{g}{\lambda}t \end{cases}$$

Lorsque $t \to \infty$

$$\begin{cases} x \to \dfrac{v_0\cos\alpha}{\lambda} \quad (assymptote) \\ z \to -\infty \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_x \to 0 \\ v_z \to -\dfrac{g}{\lambda} = -\dfrac{mg}{k} = v_{lim} \end{cases}$$

Pour que la vitesse limite soit atteinte, il ne faut pas que le projectile atteigne trop vite le sol.
La vitesse limite est en fait la solution particulière de l'équation

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + k\mathbf{v} = m\mathbf{g}$$

En effet lorsque la vitesse limite est atteinte $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ et

$$\mathbf{v}_{lim} = \frac{m\mathbf{g}}{k}$$

4.2.2 Chute libre avec frottement « en v^2 »

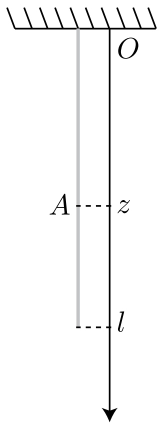
$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - kv\mathbf{v}$$

$$\begin{cases} m\frac{dv_x}{dt} = -k\sqrt{v_x^2 + v_z^2}\, v_x \\ m\frac{dv_z}{dt} = -mg - k\sqrt{v_x^2 + v_z^2}\, v_z \end{cases}$$

Ce système d'équations différentielles couplées n'admet pas de solution analytique (résolution numérique) sauf dans le cas particulier du mouvement vertical :

$$m\frac{dv_z}{dt} = -mg - k\sqrt{v_z^2}\, v_z$$

4.3 Tension d'un fil



Un fil est suspendu par l'une de ses extrémités à un support.
A l'équilibre, la partie supérieure au point A exerce une force qui compense le poids de la partie inférieure de masse $m(l-z)/l$:

$$T + mg(l-z)/l = 0$$

d'où

$$T = -mg(l-z)/l$$

La tension est bien dirigée vers le haut.

Pour $z = l$, $T = 0$ et pour $z = 0$, $T = -mg$.

On accroche en A un objet de masse m' :

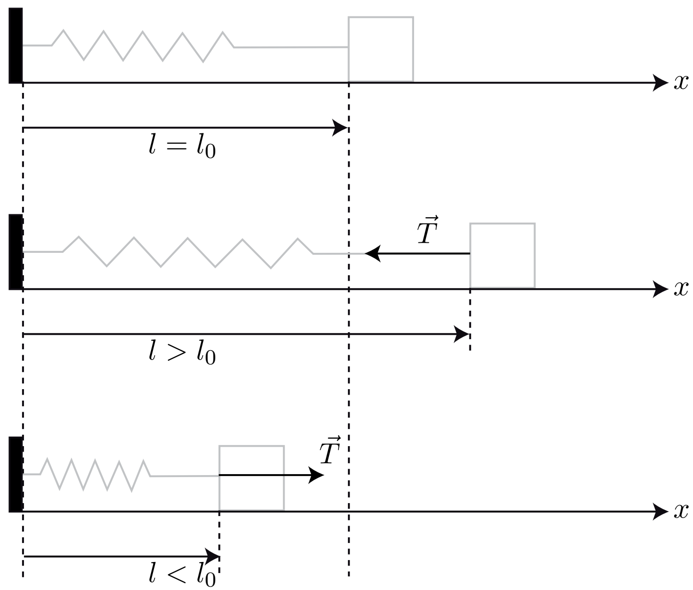
$$T + mg(l-z)/l + m'g = 0$$

Pour $z = l$, $T = -m'g$.

Pour un **fil idéal** de masse nulle, la tension vaut $T = -m'g$ en tout point du fil.

Une **poulie idéale** ne modifie pas la tension (en norme) d'un fil idéal. La tension (en norme) est donc la même de chaque côté de la poulie.

4.4 Force de rappel élastique



La force exercée par le ressort est proportionnel à l'allongement $X = l - l_0$:

$$\|T\| = k|l - l_0|$$

k est la constante de raideur du ressort ($N.m^{-1}$) et l_0 la longueur à vide.

Si l'allongement est nul, alors $T = 0$.

Si l'allongement est positif (ressort étiré) alors la tension est orientée selon $-\mathbf{e}_X$.

Si l'allongement est négatif (ressort comprimé) alors la tension est orientée selon $\mathbf{e}_X$.

Dans tous les cas, elle peut s'exprimer

$$\mathbf{T} = -kX\mathbf{e}_X$$

4.5 Force de liaison

La réaction du support est la force sans laquelle le système étudié « s'enfoncerait dans le support » !
Elle est normale au support lorsqu'il n'y a pas de frottement.
Lorsqu'il y a des frottements, il existe une composante tangentielle.