Régime sinusoïdal forcé

Table des matières

1 Rôle générique pour l'étude des régimes périodiques forcés 1

2 Signaux sinusoïdaux 1
2.1 Amplitude, phase, pulsation et fréquence 1
2.2 Valeur moyenne et valeur efficace 2
2.3 Notation complexe 2
2.4 Représentation de Fresnel 3

3 Étude du RLC série 3
3.1 Régime sinusoïdal forcé 3
3.2 Simplification apportée par la notation complexe 3
3.3 Réponse en intensité - Résonance d'intensité 4
3.4 Réponse en charge - Résonance de tension aux bornes du condensateur 5

4 Impédance 6
4.1 Définition 6
4.2 Dipôles R, L et C 6
4.3 Générateurs 6

5 Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé 7
5.1 Loi des noeuds 7
5.2 Loi des mailles 7
5.3 Association série - Diviseur de tension 7
5.4 Association parallèle - Diviseur de courant 7
5.5 Loi des noeuds en terme de potentiel 7
5.6 Générateurs équivalents de Thévenin et Norton 7

6 Puissance en régime sinusoïdal forcé 7
6.1 Puissance instantanée - Puissance moyenne - Facteur de puissance 7
6.2 Notation complexe 7

1 Rôle générique pour l'étude des régimes périodiques forcés

Nous allons reprendre l'étude du régime libre en ajoutant à l'équation différentielle un second membre sinusoïdal.

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$$

Tout signal périodique $s(t)$ de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux (série de Fourier)

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(A_n\cos(n\omega t) + B_n\sin(n\omega t)\right)$$

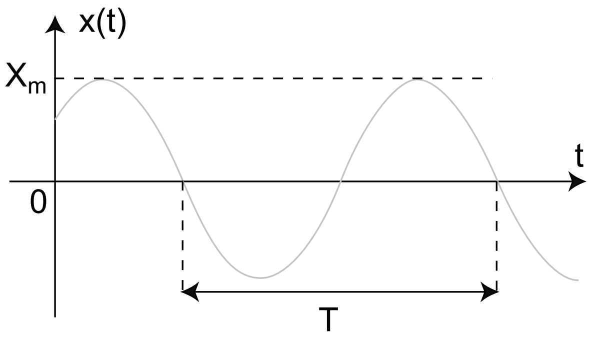
Si nous rajoutons à l'équation différentielle un second membre périodique (non sinusoïdal), connaissant la solution avec second membre sinusoïdal nous pouvons en déduire la solution avec second membre périodique.
En effet L'équation différentielle étant linéaire, la solution avec second membre périodique peut s'écrire comme une combinaison linéaire des solutions avec second membre sinusoïdal d'où le rôle générique du régime sinusoïdal forcé pour l'étude des régimes périodiques forcés.

2 Signaux sinusoïdaux

2.1 Amplitude, phase, pulsation et fréquence

Une grandeur sinusoïdale peut-être représentée par

$$\boxed{x(t) = X_m\cos(\omega t + \varphi)}$$



X_m est l'**amplitude** (dimension de la grandeur x)

ω est la **pulsation** en $rad.s^{-1}$

$\omega t + \varphi$ est la **phase** à l'instant t (en radian)

φ est la phase à l'origine des temps (en radian)

La **période** temporelle est la durée au bout de laquelle le signal se reproduit identique à lui-même

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

en seconde (s)

La **fréquence** du signal est le nombre de périodes (ou cycles) par seconde

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$

en hertz (Hz)

2.2 Valeur moyenne et valeur efficace

On définit d'une manière générale pour un signal périodique la **valeur moyenne** notée $< x >$ par

$$< x(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

$< x >= 0$ pour une fonction sinusoïdale.

On définit d'une manière générale pour un signal périodique la **valeur efficace** notée X par

$$X^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

Pour une fonction sinusoïdale

$$X^2 = \frac{X_m^2}{T}\frac{1}{2}T \Rightarrow \boxed{X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}}$$

2.3 Notation complexe

Toute grandeur sinusoïdale de pulsation ω peut-être mise sous la forme

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La représentation complexe de $x(t)$ est la fonction complexe

$$\boxed{\underline{x}(t) = X_m \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{X}_m \exp j\omega t}$$

avec $j^2 = -1$

$\underline{X}_m = X_m \exp j\varphi$ est l'**amplitude complexe**, son module est égale à l'amplitude de la grandeur $x(t)$

$$\boxed{X_m = |\underline{X}_m|}$$

son argument est égale à la phase à l'origine des temps de la grandeur $x(t)$

$$\boxed{\varphi = \arg(\underline{X}_m)}$$

Le retour à la grandeur réelle s'effectue en prenant la partie réelle de la fonction complexe

$$x(t) = \mathcal{R}e\{\underline{x}(t)\}$$

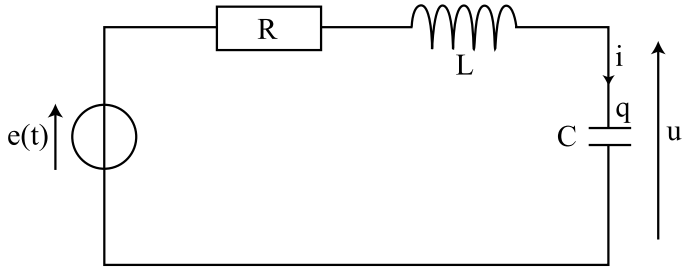
Attention $X_m \neq \mathcal{R}e\{\underline{X}_m\}$

2.4 Représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel de $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ est la représentation géométrique de $\underline{X}_m$ dans le plan complexe.

3 Étude du RLC série

3.1 Régime sinusoïdal forcé



Nous avons déjà étudié le régime libre $e(t) = 0$ et la réponse à un échelon de tension $e(t) = E$.
Nous allons étudié le cas où $e(t) = E_m \cos \omega t$

$$\ddot{q} + 2\alpha\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_m}{L}\cos\omega t$$

La solution est la somme

$$q = q^{(h)} + q^{(p)}$$

$q^{(h)}$ correspond au régime libre qui disparaît au bout de quelques $\tau = \dfrac{1}{2\alpha}$

$q^{(p)}$, solution particulière, est de la forme $Q_m \cos(\omega t + \varphi)$

En **régime sinusoïdal forcé**, le régime libre a disparu, on cherche donc une solution de la forme

$$q(t) = Q_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La réponse $q(t)$ à la même pulsation que l'excitation $e(t)$; reste à déterminer l'amplitude et le déphasage.

En reportant $q(t)$ dans l'équation différentielle, on trouve

$$-Q_m\omega^2(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi) - 2\alpha Q_m \omega(\sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi)$$

$$+\omega_0^2 Q_m(\cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi) = \frac{E_m}{L}\cos\omega t$$

En identifiant les termes en $\cos\omega t$ et les termes en $\sin\omega t$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)Q_m\cos\varphi - 2\alpha\omega\, Q_m\sin\varphi = \dfrac{E_m}{L} \\ -2\alpha\omega\, Q_m\cos\varphi - (\omega_0^2-\omega^2)Q_m\sin\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\dfrac{E_m}{L}(\omega_0^2-\omega^2)}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]Q_m} \\ \sin\varphi = \dfrac{-2\alpha\omega\dfrac{E_m}{L}}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]Q_m} \end{cases}$$

$$\tan\varphi = \frac{-2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow Q_m = \frac{\dfrac{E_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

3.2 Simplification apportée par la notation complexe

Soit $\underline{q}(t)$ la représentation complexe de $q(t)$.
L'équation différentielle étant linéaire, si $q(t)$ est solution alors $\underline{q}(t)$ est aussi solution (on remplace $\cos\omega t$ par $\exp(j\omega t)$ dans l'équation différentielle)

$$-\omega^2\,\underline{Q}_m \exp j(\omega t) + 2\alpha j\omega\,\underline{Q}_m\exp j(\omega t) + \omega_0^2\,\underline{Q}_m\exp j(\omega t) = \frac{E_m}{L}\exp(j\omega t)$$

On simplifie par $\exp(j\omega t)$

$$\underline{Q}_m = \frac{\dfrac{E_m}{L}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\,2\alpha\omega}$$

et on en déduit directement l'amplitude

$$Q_m = |\underline{Q}_m| = \frac{\frac{E_m}{L}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

et le déphasage

$$\varphi = \arg(\underline{Q}_m) = \arctan \frac{-2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Retenons que d'une manière générale en notation complexe : - dériver revient à multiplier par $j\omega$ (à tourner de $\pi/2$ dans le plan complexe) ; - intégrer revient à diviser par $j\omega$ (à tourner de $-\pi/2$ dans le plan complexe).

3.3 Réponse en intensité - Résonance d'intensité

$$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt$$

En régime sinusoïdal forcé ($i^{(h)} \to 0$), on cherche une solution de la forme

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

ayant pour représentation complexe

$$\underline{i}(t) = \underline{I}_m \exp(\omega t)$$

avec $\underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi)$

$\underline{i}(t)$ est solution de l'équation différentielle

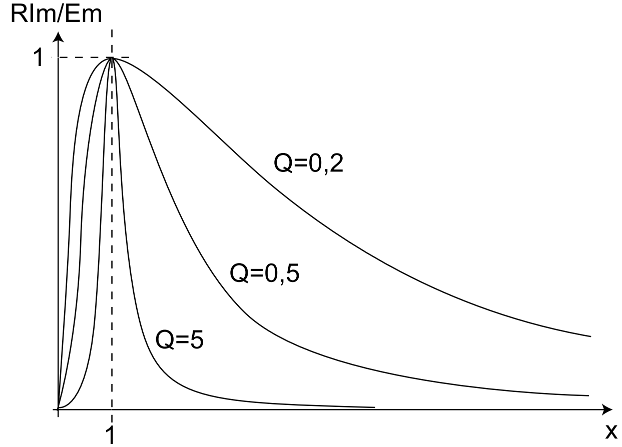
$$E_m \exp(j\omega t) = R\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{i}dt$$

$$E_m = \left(R + Lj\omega + \frac{1}{C}\frac{1}{j\omega}\right)\underline{I}_m$$

$$\underline{I}_m = \frac{E_m}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{E_m}{R}\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

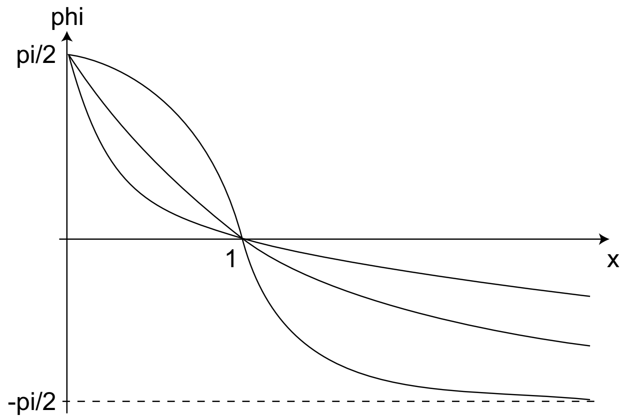
avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

$$I_m = |\underline{I}_m| = \frac{E_m}{R}\frac{1}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$



On observe un **phénomène de résonance** d'autant plus marqué que le facteur de qualité est élevé.

$$\varphi = \arg(\underline{I}_m) = -\arctan Q(x - \frac{1}{x})$$



Quelque soit le facteur de qualité, il y a toujours résonance d'intensité pour $\omega = \omega_0$; à la résonance, l'intensité est maximale et le déphasage entre la réponse (l'intensité) et l'excitation (tension $e(t)$) est nul.

3.4 Réponse en charge - Résonance de tension aux bornes du condensateur

$$e(t) = RC\frac{du}{dt} + LC\frac{d^2u}{dt^2} + u$$

En régime sinusoïdal forcé ($u^{(h)} \to 0$), on cherche une solution de la forme

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

ayant pour représentation complexe

$$\underline{u}(t) = \underline{U}_m \exp(\omega t)$$

avec $\underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi_u)$

$\underline{u}(t)$ est solution de l'équation différentielle

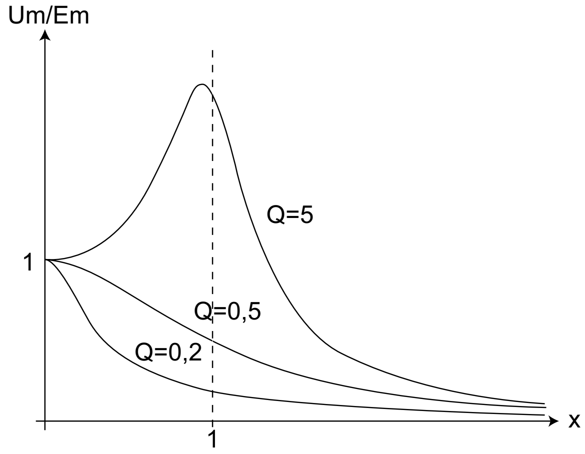
$$E_m \exp(j\omega t) = RC\frac{d\underline{u}}{dt} + LC\frac{d^2\underline{u}}{dt^2} + \underline{u}$$

$E_m = \left(RCj\omega - LC\omega^2 + 1\right)\underline{U}_m$

$$\underline{U}_m = \frac{E_m}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega} = \frac{E_m}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

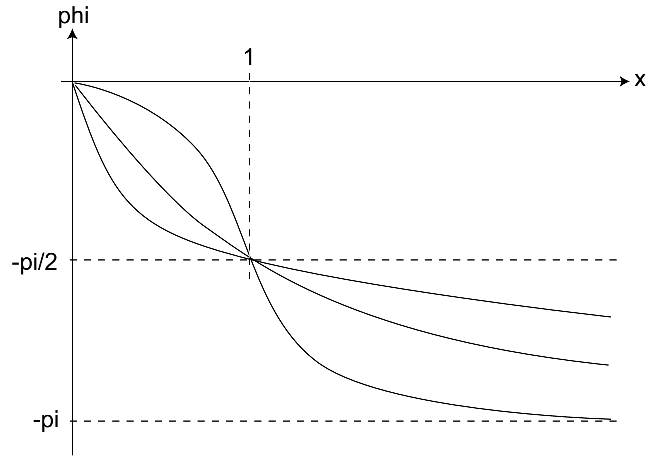
avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $Q = \dfrac{1}{RC\omega_0}$

$$U_m = |U_m| = \frac{E_m}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$



On n'observe pas toujours un **phénomène de résonance**. S'il y a résonance, celle-ci est d'autant plus marquée que le facteur de qualité est élevé.

$$\varphi_u = \arg(\underline{U}_m) = -\arctan\frac{x}{Q(1-x^2)}$$



Si le facteur de qualité est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, il y a résonance de tension aux bornes du condensateur pour une pulsation d'autant plus proche de ω_0 que le facteur de qualité est élevé ; à la résonance, la tension est maximale mais le déphasage entre la réponse (la tension aux bornes du condensateur) et l'excitation (tension $e(t)$) n'est pas nul.

Il y a résonance si U_m admet un maximum ou si $(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}$ admet un minimum c'est à dire si

$$2(1-x^2)(-2x)+\frac{2x}{Q^2}=0$$

$$x^2=1-\frac{1}{2Q^2}$$

On trouve $\omega_r=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ à condition que $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$
U_m vaut alors

$$U_m(\omega_r)=\frac{QE_m}{1-\frac{1}{4Q^2}}\simeq QE_m$$

Q est aussi appelé facteur de surtension.

4 Impédance

4.1 Définition

Soit un dipôle passif linéaire fonctionnant en régime sinusoïdal forcé. Si $\underline{U}_m$ et $\underline{I}_m$ désignent les amplitudes complexes associées à $u(t)$ et $i(t)$, on appelle impédance complexe du dipôle la grandeur notée $\underline{Z}$ et définie en *convention récepteur* par

$$\boxed{\underline{Z}=\frac{\underline{u}}{\underline{i}}=\frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}}$$

On définie aussi l'**admittance complexe**

$$\boxed{\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}}$$

$\underline{Z}$ contient tout ce qui caractérise le comportement du dipôle en régime sinusoïdal forcé

$$\boxed{|\underline{Z}|=\frac{U_m}{I_m}=\frac{U}{I}}$$

rapport des valeurs maximales (oscilloscope) ou rapport des valeurs efficaces (multimètre) en ohm (Ω)

$$\boxed{\arg\underline{Z}=\varphi_u-\varphi_i}$$

déphasage de la tension par rapport à l'intensité

4.2 Dipôles R, L et C

Pour une résistance R

$$\underline{u}=R\underline{i}\rightarrow\boxed{\underline{Z}=R}$$

Pour une inductance L

$$\underline{u}=L\frac{d\underline{i}}{dt}=Lj\omega\underline{i}\rightarrow\boxed{\underline{Z}=jL\omega}$$

La tension est en avance de $\pi/2$ sur l'intensité.

Pour un condensateur C

$$\underline{i}=C\frac{d\underline{u}}{dt}=Cj\omega\underline{u}\rightarrow\boxed{\underline{Z}=\frac{1}{jC\omega}}$$

La tension est en retard de $\pi/2$ sur l'intensité.

4.3 Générateurs

linéaire en régime sinusoïdal forcé si

$$\underline{u}=\underline{e}-\underline{Z}\underline{i}$$

$\underline{e}$ est la fem complexe du générateur
$\underline{Z}$ est l'impédance interne du générateur

5 Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

Un réseau linéaire en régime sinusoïdal forcé est un réseau constitué de dipôles passifs linéaires et de générateurs linéaires délivrant des tensions ou des courants sinusoïdaux que nous choisirons tous de même pulsation ω.
Tous les résultats vus sur les réseaux linéaires sont transposables à condition de raisonner sur les amplitudes complexes et d'élargir la notion de résistance à la notion d'impédance.

5.1 Loi des noeuds

5.2 Loi des mailles

5.3 Association série - Diviseur de tension

$$\underline{U}_{2m} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{U}_m$$

5.4 Association parallèle - Diviseur de courant

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I}_m$$

5.5 Loi des noeuds en terme de potentiel

$$\underline{V}_{Nm} = \frac{\sum \underline{Y}_k \underline{V}_{km}}{\sum \underline{Y}_k}$$

5.6 Générateurs équivalents de Thévenin et Norton

6 Puissance en régime sinusoïdal forcé

6.1 Puissance instantanée - Puissance moyenne - Facteur de puissance

Soit $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ la tension aux bornes d'un dipôle linéaire quelconque orienté en convention récepteur et $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ l'intensité du courant le traversant.

La **puissance instantanée** reçue par le dipôle

$$p(t) = u(t)i(t) = U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_m I_m}{2}(\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi)$$

La **puissance moyenne**

$$\boxed{P = \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = UI\cos\varphi}$$

$\cos\varphi$ est le **facteur de puissance**

Aux bornes d'une résistance

$$P = UI$$

Aux bornes d'une bobine ou d'un condensateur

$$P = 0$$

6.2 Notation complexe

La puissance moyenne peut s'écrire

$$P = \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{2}\underline{u}\,\underline{i}^*\right\}$$

en effet $\underline{u}\,\underline{i}^* = U_m \exp(j\omega t) I_m \exp -(j\omega t + \varphi) = U_m I_m \exp -j\varphi$

Posons $\underline{Z} = R + jX$ alors

$$P = \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{2}\underline{Z}\,\underline{I}_m\,\underline{I}_m^*\right\}$$

$$= \mathcal{R}e\left\{\frac{1}{2}\underline{Z}\,|\underline{I}_m|^2\right\} = \frac{|\underline{I}_m|^2}{2}\mathcal{R}e\{\underline{Z}\} = RI^2$$