Filtre du 1^{er}ordre

Table des matières

1 Introduction

Qu'est-ce qu'un filtre ?

De même qu'un filtre optique ne laisse passer que certaines couleurs, un filtre en électrocinétique ne laissera passer que certains signaux sinusoïdaux caractérisés par une pulsation ω.

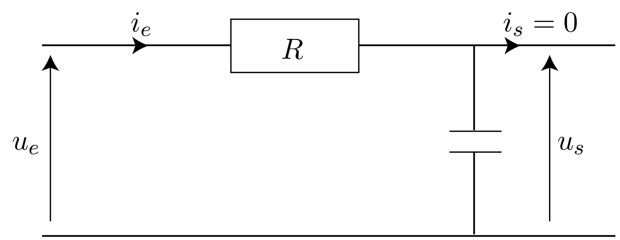
A l'entrée du filtre, on applique par exemple une tension de pulsation ω ; si, à la sortie du filtre, la tension n'est pas trop atténuée, on considère que le filtre laisse passer la pulsation ω ; si au contraire, la tension est très atténuée, on considère que le filtre ne laisse pas passer la pulsation ω.

Le filtre sera alors caractérisé par l'ensemble des pulsations ou fréquences qu'il laisse passer appelé **bande passante**.
Un filtre **passe bas** laisse passer les pulsations inférieures à une pulsation ω_c.
Un filtre **passe haut** laisse passer les pulsations supérieures à une pulsation ω_c.
Un filtre **passe bande** laisse passer les pulsations comprises entre ω_{c1} et ω_{c2}.
Un filtre **coupe bande** ou **réjecteur de bande** laisse passer les pulsations inférieures à ω_{c1} et supérieures à ω_{c2}.

Un filtre peut donc être utilisé pour ne sélectionner que certaines pulsations (radio, TV...).

D'une manière générale, comme tout signal périodique peut-être considéré comme une superposition de signaux sinusoïdaux, connaissant le *spectre* du signal d'entrée et les caractéristiques du filtres, on peut en déduire le spectre du signal de sortie et donc la forme du signal après passage dans le filtre.

2 Filtre passe-bas du premier ordre



2.1 Comportement asymptotique

L'impédance du condensateur vaut

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Si $\omega \to 0$ alors $\underline{Z}_C \to \infty$ (refaire le schéma en supprimant la branche contenant le condensateur) et $\underline{U}_s \to \underline{U}_e$.

Si $\omega \to \infty$ alors $\underline{Z}_C \to 0$ (refaire le schéma en remplaçant la branche contenant le condensateur par un fil) et $\underline{U}_s \to 0$.

On peut donc déjà dire que le filtre transmet les signaux de basse fréquence et atténue ceux de haute fréquence d'où la dénomination de *filtre passe-bas*.

2.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert est définie par

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}}$$

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

2.3 Diagramme de Bode - Pulsation de coupure à -3dB

2.3.1 Représentation de la courbe de gain

Le module de la fonction de transfert est appelé **gain**

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

expérimentalement $H(\omega) = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}} = \dfrac{U_s}{U_e}$ (oscilloscope ou multimètre)

On définie le **gain en décibel**

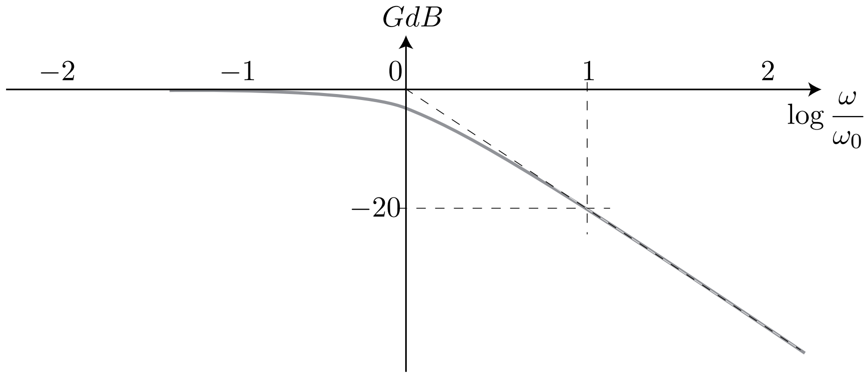
$$\boxed{G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|}$$

$$= -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

On représente le gain en décibel non pas en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ (ou ω ou f) mais en fonction de $\log \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (la plage de fréquence pouvant s'étendre de quelques Hz à $10^6\,Hz$ et plus)

Si ω petit devant ω_0 alors $G_{dB} \simeq 0$

Si ω grand devant ω_0 alors $G_{dB} \simeq -20 \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$ droite de pente $-20\,dB$ par décade ce qui signifie que si ω est multiplié par 10, $\log \dfrac{\omega}{\omega_0}$ augmente de 1 et G_{dB} diminue de $20\,dB$



Les deux asymptotes se coupent pour $0 = -20 \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$ c'est à dire pour $\omega = \omega_0$;

pour $\omega = \omega_0$, $H(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $G_{dB} = 20 \log \dfrac{1}{\sqrt{2}} \simeq -3\,dB$. ω_0 est appelé pulsation de coupure à $-3\,dB$ et noté ω_c.

La **pulsation de coupure à** $-3\,dB$ du filtre est par définition la pulsation telle que

$$\boxed{G_{dB}(\omega_c) = -3\,dB}$$

Elle peut être interprétée comme la limite entre les comportements BF et HF du filtre :

les signaux de pulsations $\omega < \omega_c$ sont transmis en sortie avec une atténuation inférieure à $3\,dB$;
les signaux de pulsations $\omega > \omega_c$ sont transmis en sortie avec une atténuation supérieure à $3\,dB$;
Idéalement on considérera que le filtre laisse passer une pulsation ω si l'atténuation en sortie est inférieure à $3\,dB$.

La **bande passante** de ce filtre, c'est à dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer, est donc $[0, \omega_0]$.

2.3.2 Représentation de la courbe de phase

L'argument de la fonction de transfert est appelé **phase**

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)}$$

$$= 0 - \arg(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$

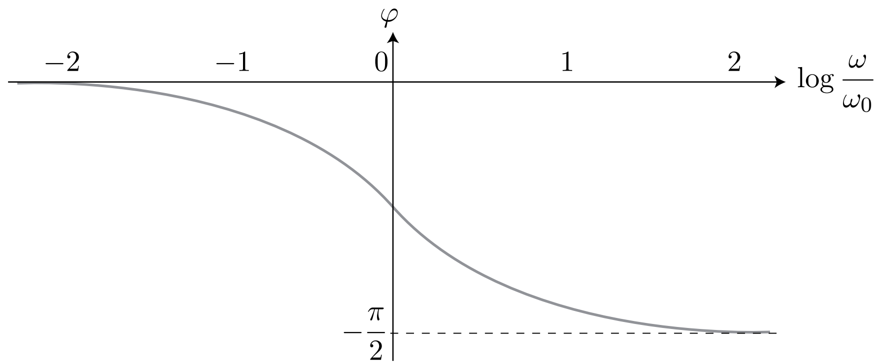
expérimentalement $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e$ (oscilloscope)

On représente la phase non pas en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$ (ou ω ou f) mais en fonction de $\log\frac{\omega}{\omega_0}$ (la plage de fréquence pouvant s'étendre de quelques Hz à $10^6\,Hz$ et plus)

Si ω petit devant ω_0 alors $\varphi \simeq 0$

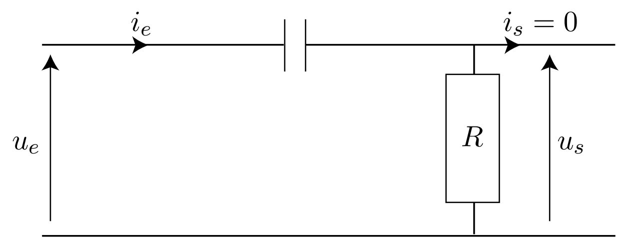
Si ω grand devant ω_0 alors $\varphi \simeq -\frac{\pi}{2}$

Si $\omega = \omega_0$ alors $\varphi = -\frac{\pi}{4}$



Pour $\omega = 0,1\omega_0$, $\varphi = -6^\circ$
Pour $\omega = 10\omega_0$, $\varphi = 84^\circ$
L'essentiel de la rotation de phase se fait donc entre $0,1\omega_0$ et $10\omega_0$ c'est à dire sur deux décades.

3 Filtre passe-haut du premier ordre



3.1 Comportement asymptotique

L'impédance du condensateur vaut

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Si $\omega \to 0$ alors $\underline{Z}_C \to \infty$ (refaire le schéma en supprimant la branche contenant le condensateur) et $\underline{U}_s \to 0$.

Si $\omega \to \infty$ alors $\underline{Z}_C \to 0$ (refaire le schéma en remplaçant la branche contenant le condensateur par un fil) et $\underline{U}_s \to \underline{U}_e$.

On peut donc déjà dire que le filtre transmet les signaux de haute fréquence et atténue ceux de basse fréquence d'où la dénomination de *filtre passe-haut*.

3.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert est définie par

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}}$$

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$

3.3 Diagramme de Bode - Pulsation de coupure à -3dB

3.3.1 Représentation de la courbe de gain

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

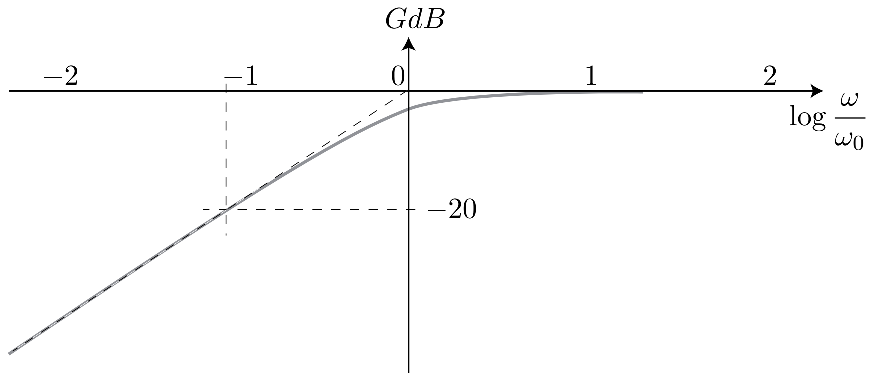
expérimentalement $H(\omega) = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}} = \dfrac{U_s}{U_e}$ (oscilloscope ou multimètre)

$$\boxed{G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)|}$$

$$= 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Si ω petit devant ω_0 alors $G_{dB} \simeq 20 \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$

Si ω grand devant ω_0 alors $G_{dB} \simeq 20 \log \dfrac{\omega}{\omega_0} - 10 \log \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 0$



Les deux asymptotes se coupent pour $0 = 20 \log \dfrac{\omega}{\omega_0}$ c'est à dire pour $\omega = \omega_0 = \omega_c$, pulsation de coupure à $-3\,dB$.

La **bande passante** de ce filtre, c'est à dire l'ensemble des pulsations qu'il laisse passer, est donc $[\omega_0, \infty[$.

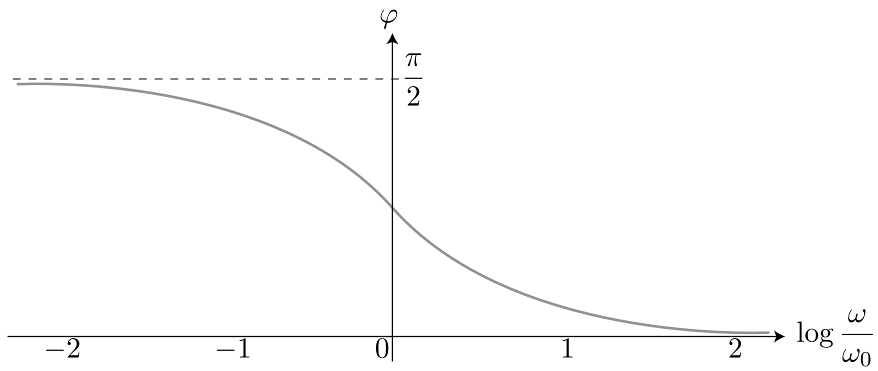
3.3.2 Représentation de la courbe de phase

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)}$$

$$= \arg(j\frac{\omega}{\omega_0}) - \arg(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

expérimentalement $\varphi(\omega) = \varphi_s - \varphi_e$ (oscilloscope)

La courbe se déduit de celle du passe-bas par une translation de $\dfrac{\pi}{2}$.



4 Généralisation

4.1 Filtre linéaire

Un filtre est linéaire si tous les éléments qui le constituent sont linéaires, alors :
- si le signal d'entrée est sinusoïdal de pulsation ω, le signal de sortie est également sinusoïdal de même pulsation ;
- les tensions d'entrée u_e et de sortie u_s sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$A_n\frac{d^n u_s}{dt^n}+...+A_1\frac{du_s}{dt}+A_0u_s=B_m\frac{d^m u_e}{dt^m}+...+B_1\frac{du_e}{dt}+B_0u_e$$

Un filtre passif ne comporte que des éléments passifs ; la puissance moyenne disponible en sortie est donc toujours inférieure ou égale à la puissance moyenne reçue en entrée.

Un filtre actif comporte en plus des sources (AO par exemple) ; la puissance moyenne disponible en sortie peut alors être supérieure à celle reçue en entrée.

4.2 Fonction de transfert en régime sinusoïdal

$u_e=U_e\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_e)$

$$\underline{u}_e=\underline{U}_e\exp(j\omega t)$$

$u_s=U_s\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_s)$

$$\underline{u}_s=\underline{U}_s\exp(j\omega t)$$

L'équation différentielle devient alors

$$A_n(j\omega)^n\underline{u}_s+...+A_1(j\omega)\underline{u}_s+A_0\underline{u}_s=B_m(j\omega)^m\underline{u}_e+...+B_1(j\omega)\underline{u}_e+B_0\underline{u}_e$$

ce qui permet d'exprimer le rapport

$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}=\frac{B_0+B_1(j\omega)+...+B_m(j\omega)^m}{A_0+A_1(j\omega)+...+A_n(j\omega)^n}$$

appelé fonction de transfert

$$\boxed{\underline{H}(j\omega)=\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}}$$

Son module donne le rapport tension de sortie sur tension d'entrée

$$|\underline{H}(j\omega)|=\frac{U_{sm}}{U_{em}}=\frac{U_s}{U_e}$$

Son argument donne la différence de phase entre la tension de sortie et la tension d'entrée

$$\arg\underline{H}(j\omega)=\varphi_s-\varphi_e$$

La fonction de transfert n'est pas une propriété intrinsèque du filtre, elle dépend du filtre mais aussi de la charge branchée à la sortie de celui-ci.

Pour tous les systèmes réels $H(\omega)$ garde une valeur finie ce qui implique que m est toujours inférieur à n qui défini l'ordre du filtre.

La fonction de transfert d'un filtre s'étudie en général sur un domaine fréquentiel très étendu (de 0 jusqu'à éventuellement plusieurs MHz), il est alors très utile d'introduire des échelles log.

Le **diagramme de Bode** comprend la représentation :

– du gain en décibel $G_{dB} = 20\log|\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de $\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$ ou en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ sur du papier semilog ;

– de la phase $\varphi = \arg \underline{H}(j\omega)$ en fonction de $\log\dfrac{\omega}{\omega_0}$ ou en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ sur du papier semilog.